

对于解不等式讨论最多的是求最值问题、含参数不等式恒成立等问题,实际上求解含参数不等式里包括不少的求最值问题,有不少的数学教学工作者结合实例总结了多种求解方法与技巧.对于含参数的不等式恒成立,确定参数取值范围的这一类问题.这类问题涉及的知识面较广,综合性较强,同时数学语言比较抽象,利用等价转化、函数思想的数学思想方法,把所求问题转化为函数问题,再运用函数的性质求解,既能解决问题又能减少运算量.

因而,求含参数不等式的恒成立问题时,常根据不等式的结构特征,恰当地构造函数,等价转化为

一次函数问题、二次函数问题、求函数的最值问题.

一、利用一次函数性质解不等式

对于一些不等式,我们可以通过变形将其转化为一次函数,然后再运用一次函数的性质求解.一次函数 $f(x)=kx+b(k \neq 0)$ 的性质 $f(x) > 0$ 在 $[a, b]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}.$$

例: 对一切 $p \in [-2, 2]$, 不等式 $\log_2^2 x + p \log_2 x + 1 > 2 \log_2 x + p$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围.

分析: 若直接解关于 x 的不等式, 再利用 $p \in [-2, 2]$ 求 x 的取值范围, 显然相当复杂. 但仔细观察后, 发现通过恒等变后, 再利用一次函数性质, 问题将得解.

解: 令 $f(p) = (\log_2 x - 1)p + (\log_2 x - 1)^2$, 由题意知 $f(p) > 0$, 在 $p \in [-2, 2]$ 上恒成立, 则有

$$\begin{cases} f(-2) = -2(\log_2 x - 1) + (\log_2 x - 1)^2 > 0, \\ f(2) = 2(\log_2 x - 1) + (\log_2 x - 1)^2 > 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_2 x > 3 \text{ 或 } \log_2 x < -1, \Rightarrow x > 8 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{2}, \text{ 所以, } x \text{ 的取值范围为 } (0, \frac{1}{2}) \cup (8, +\infty).$$

本题容易因思维定势常把原不等式视为关于 $\log_2 x$ 的二次不等式, 用分类讨论解答, 过程相当繁杂. 如果能注意观察 $\log_2 x$ 与 p 的关系, 结合常量与变量的转化思想, 把 p 变为主元, $\log_2 x$ 变为参数, 则原不等式可转化为关于 p 的一次不等式问题, 通过函数思想, 构造函数 $f(p)$, 把问题转化为常规问题, 简单易解.

二、利用二次函数性质解不等式

例: 已知不等式 $(m^2 + 4m - 5)x^2 - 4(m+1)x + 3 > 0$ 对一切实数恒成立,

求实数 m 的取值范围.

分析: 以上不等式恒成立, 首先考虑利用不等式恒为正的充要条件, 并对二次项系数分类讨论.

解: (1) 当 $m^2 + 4m - 5 = 0$ 时, 解得 $m = 1$ 或 $m = -5$. 显然, $m = 1$ 时, 符合条件; $m = -5$ 不符合条件.

(2) 当 $m^2 + 4m - 5 \neq 0$ 时, 由二次函数对一切实数恒为正数的充要条件, 得

$$\begin{cases} m^2 + 4m - 5 > 0, \\ \Delta = 16(m-1)^2 - 12(m^2 + 4m - 5) < 0, \end{cases}$$

解得 $1 < m < 19$, 所以, 实数 m 的取值范围为 $[1, 19)$.

在本题中往往会忽略二次系数为零的情况, 直接当作一元二次不等式来求解, 从而导致失解、漏解的情况出现, 应引起重视.

三、利用函数最值解不等式

通过变形将其转化为求函数最值问题, 我们常用的策略和方法有: 分离参数法、变更主元法、分类讨论法、二次函数法、数形结合法、函数的单调性法等.

例: 若对于 $x \in [2, 2]$, $mx^2 - mx - 6 + m < 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

解析: 若 $f(x) = mx^2 - mx - 6 + m < 0$, 即 $m(x^2 - x + 1) < 6$ 在 $x \in [2, 2]$ 时恒成立. 又 $x \in [2, 2]$ 时, $x^2 - x + 1 \in [\frac{3}{4}, 7]$, 即 $x^2 - x + 1 > 0$, 所以原不等式等价于 $m < \frac{6}{x^2 - x + 1}$ 恒成立, 即 $m < (\frac{6}{x^2 - x + 1})_{\min}$. 又 $\frac{6}{7} \leq \frac{6}{x^2 - x + 1} \leq 8$, 所以 $(\frac{6}{x^2 - x + 1})_{\min} = \frac{6}{7}$, 所以 $m < \frac{6}{7}$. 所以 m 的取值范围为 $(-\infty, \frac{6}{7})$.

在含参数的不等式恒成立的问题中, 若能将所求参数与自变量分离出来, 则可以借助于求函数的最值, 解出参数的范围.

责任编辑 罗 峰